

ĐỊNH LƯỢNG ĐỘ RỜI VÀ VIỆN TẢI LƯỢNG TỬ VỚI TRẠNG THÁI THÊM HAI VÀ BỐT MỘT PHOTON LÊN HAI MODE KẾT HỢP LẺ

Nguyễn Thị Lương Oanh¹

Trương Minh Đức¹

Trần Quang Đạt²

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi định lượng độ rời và viễn tải lượng tử của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ. Để khảo sát tính đan rối của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ, chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn Hillery-Zubairy bậc cao và tiêu chuẩn Concurrence. Kết quả đây là một trạng thái đan rối mạnh nếu ta chọn các tham số thích hợp. Sau đó, chúng tôi viễn tải lượng tử với trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ và thông qua độ trung thực trung bình, chúng tôi thấy rằng quá trình viễn tải là thành công khi chọn các tham số phù hợp và độ trung thực trung bình của quá trình viễn tải nằm trong khoảng từ $0.5 < F_{av} \leq 1$.

Từ khóa: Tiêu chuẩn đan rối Hillery – Zubairy bậc cao, tiêu chuẩn Concurrence, quá trình viễn tải lượng tử, độ trung thực trung bình

1. Giới thiệu

Từ hệ thức bất định Heisenberg, Glauber [1] và Sudarshan [2] đưa ra trạng thái kết hợp $|\alpha\rangle$ vào năm 1963, đây là trạng thái tương ứng với thăng giáng lượng tử nhỏ nhất. Vào năm 1991, Agarwal và Tara đã đề xuất ý tưởng về trạng thái kết hợp thêm photon [3] và cũng đã chứng minh được đây là một trạng thái phi cổ điển. Một phương

pháp quan trọng để tạo ra một trạng thái phi cổ điển mới đó là thêm và bớt photon vào một trạng thái vật lý. Các trạng thái phi cổ điển có vai trò quan trọng trong việc mở ra những ứng dụng mới trong kỹ thuật, công nghệ thông tin lượng tử. Trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ được viết như sau:

$$|\psi\rangle_{ab} = N_{\alpha,\beta} (\hat{a}^{+2} + \hat{b}) (|\alpha\rangle_a |\beta\rangle_b - |\beta\rangle_a |\alpha\rangle_b), \quad (1)$$

với $N_{\alpha\beta}$ là hệ số chuẩn hóa

¹Trường Đại học Sư phạm – Đại học Huế
Email: tmduc2009@gmail.com

²Trường Đại học Giao thông vận tải –
Phân hiệu tại TP. Hồ Chí Minh

$$N_{\alpha\beta} = \{4 + 5|\alpha|^2 + |\alpha|^4 + 2\text{Re}[\alpha^2\beta + \beta^2\alpha] + 5|\beta|^2 + |\beta|^4 - 2\text{Re}[5\alpha^*\beta + \alpha^{*2}\beta^2 + \beta^2\alpha + \beta^*\alpha^{*2} + 2] \times \exp(-|\alpha - \beta|^2)\}^{-1/2}, \quad (2)$$

\hat{a}^\dagger là toán tử sinh đối với mode a , \hat{b} là toán tử hủy đối với mode b .

Tác giả Nguyễn Vũ Thụy [4] đã nghiên cứu các tính chất phi cổ điển của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ. Quá trình viễn tải lượng tử đối với họ các trạng thái kết hợp SU(2) đã được nghiên cứu trong [5] và kết hợp SU(2) thêm hai photon đã được khảo sát trong [6]. Tuy nhiên, việc định lượng độ rối và viễn tải lượng tử với trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ vẫn chưa được đề cập đến. Vì vậy, trong bài báo này chúng tôi tiến hành định lượng độ rối và viễn tải lượng tử với trạng thái

thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ.

2. Định lượng độ rối của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ

2.1. Định lượng độ rối bằng tiêu chuẩn đan rối Hillery-Zubairy bậc cao

Bằng cách kiểm tra phương sai tích các toán tử sinh và hủy trong các mode mà Hillery và Zubairy [7] đưa ra một lớp các bất đẳng thức mà trong đó sự vi phạm của chúng chỉ ra sự đan rối trong hệ hai mode. Điều kiện đan rối bậc cao được cho bởi bất đẳng thức:

$$\langle \hat{a}^{\dagger m} \hat{a}^m \hat{b}^{\dagger n} \hat{b}^n \rangle < \left| \langle \hat{a}^m \hat{b}^{\dagger n} \rangle \right|^2. \quad (3)$$

Để thuận tiện cho khảo sát chúng tôi đưa vào tham số đan rối R_H dưới dạng:

$$R_H = \langle \hat{a}^{\dagger l} \hat{a}^l \hat{b}^{\dagger p} \hat{b}^p \rangle - \left| \langle \hat{a}^l \hat{b}^{\dagger p} \rangle \right|^2. \quad (4)$$

Một trạng thái bất kỳ được xem là trạng thái đan rối nếu $R_H < 0$, ngược lại nếu giá trị $R_H \geq 0$ thì trạng thái đó không đan rối và R_H càng âm thì mức

độ đan rối càng tăng. Đối với trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ thì R_H có dạng như sau:

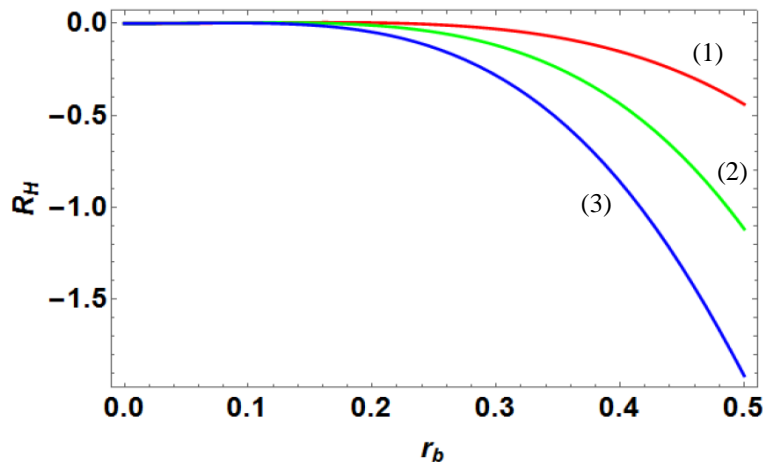
$$\begin{aligned}
R_H = & \left| N_{\alpha\beta} \right|^2 \left\{ \left[\left| \alpha \right|^{2(l+2)} + 4(l+1) \left| \alpha \right|^{2(l+1)} + (6l^2 + 6l + 2) \left| \alpha \right|^{2l} \right. \right. \\
& + 4l^3 \left| \alpha \right|^{2(l-1)} + l^2 (l-1)^2 \left| \alpha \right|^{2(l-2)} \left. \right] \left| \beta \right|^{2p} + \left| \alpha \right|^{2l} \left| \beta \right|^{2(p+1)} \\
& + \left(\left| \alpha \right|^{2l} + 2l \left| \alpha \right|^{2(l-1)} + l(l-1) \left| \alpha \right|^{2(l-2)} \right) \left| \beta \right|^{2p} \alpha^* \beta^* \\
& + \left(\left| \alpha \right|^{2l} + 2l \left| \alpha \right|^{2(l-1)} + l(l-1) \left| \alpha \right|^{2(l-2)} \right) \left| \beta \right|^{2p} \alpha^2 \beta + \left[\left| \beta \right|^{2(l+2)} \right. \\
& + 4(l+1) \left| \beta \right|^{2(l+1)} + (6l^2 + 6l + 2) \left| \beta \right|^{2l} + 4l^3 \left| \beta \right|^{2(l-1)} \\
& + l^2 (l-1)^2 \left| \beta \right|^{2(l-2)} \left. \right] \left| \alpha \right|^{2p} + \left| \beta \right|^{2l} \left| \alpha \right|^{2(p+1)} + \left(\left| \beta \right|^{2l} + 2l \left| \beta \right|^{2(l-1)} \right. \\
& + l(l-1) \left| \beta \right|^{2(l-2)} \left. \right) \left| \alpha \right|^{2p} \alpha^* \beta^{*2} + \left(\left| \beta \right|^{2l} + 2l \left| \beta \right|^{2(l-1)} \right. \\
& + l(l-1) \left| \beta \right|^{2(l-2)} \left. \right) \left| \alpha \right|^{2p} \alpha \beta^2 - \left[\left(\alpha^{*(l+2)} \beta^{(l+2)} \right. \right. \\
& + 4(l+1) \alpha^{*(l+1)} \beta^{(l+1)} + (6l^2 + 6l + 2) \alpha^{*l} \beta^l + 4l^3 \alpha^{*(l-1)} \beta^{(l-1)} \\
& + l^2 (l-1)^2 \alpha^{*(l-2)} \beta^{(l-2)} \left. \right) \beta^{*p} \alpha^p + \left(\alpha^{*(l+2)} \beta^l + 2l \alpha^{*(l+1)} \beta^{(l-1)} \right. \\
& + l(l-1) \alpha^{*l} \beta^{(l-2)} \left. \right) \beta^{*(p+1)} \alpha^p + \left(\alpha^{*l} \beta^{(l+2)} + 2l \alpha^{*(l-1)} \beta^{(l+1)} \right. \\
& + l(l-1) \alpha^{*(l-2)} \beta^l \left. \right) \beta^{*p} \alpha^{(p+1)} + \alpha^{*l} \beta^l \beta^{*(p+1)} \alpha^{(p+1)} \\
& + \left(\alpha^{(l+2)} \beta^{*(l+2)} + 4(l+1) \alpha^{(l+1)} \beta^{*(l+1)} + (6l^2 + 6l + 2) \alpha^l \beta^{*l} \right. \\
& + 4l^3 \alpha^{(l-1)} \beta^{*(l-1)} + l^2 (l-1)^2 \alpha^{(l-2)} \beta^{*(l-2)} \left. \right) \alpha^{*p} \beta^p \\
& + \left(\beta^{*(l+2)} \alpha^l + 2l \beta^{*(l+1)} \alpha^{(l-1)} + l(l-1) \beta^{*l} \alpha^{(l-2)} \right) \alpha^{*(p+1)} \beta^p \\
& + \left(\beta^{*l} \alpha^{(l+2)} + 2l \beta^{*(l-1)} \alpha^{(l+1)} + l(l-1) \beta^{*(l-2)} \alpha^l \right) \alpha^{*p} \beta^{(p+1)} \\
& + \beta^{*l} \alpha^l \alpha^{*(p+1)} \beta^{(p+1)} \left. \right] \times \exp(-|\alpha - \beta|^2) \left\} \right. \\
& - \left| N_{\alpha\beta} \right|^2 \left\{ \left(\left| \alpha \right|^4 + 2(l+2) \left| \alpha \right|^2 + (l^2 + 3l + 2) \right) \alpha^{*l} \beta^p \right. \\
& + \alpha^{*(l+2)} \beta^* \beta^p + \left[\alpha^2 \alpha^{*l} + 2l \alpha \alpha^{*(l-1)} + l(l-1) \alpha^{*(l-2)} \right] \beta^{(p+1)} \\
& + \alpha^{*l} \beta^* \beta^{(p+1)} + \left[\left| \beta \right|^4 + 2(l+2) \left| \beta \right|^2 + (l^2 + 3l + 2) \right] \beta^{*l} \alpha^p \\
& + \left[\beta^2 \beta^{*l} + 2l \beta \beta^{*(l-1)} + l(l-1) \beta^{*(l-2)} \right] \alpha^{(p+1)} + \beta^{*(l+2)} \alpha^* \alpha^p \\
& + \beta^{*l} \alpha^* \alpha^{(p+1)} - \left(\left[\beta^{*(l+2)} \alpha^2 + 2(l+2) \beta^{*(l+1)} \alpha + (l^2 + 3l + 2) \beta^{*l} \right] \beta^p \right. \\
& + \left[\alpha^2 \beta^{*l} + 2l \alpha \beta^{*(l-1)} + l(l-1) \beta^{*(l-2)} \right] \beta^{(p+1)} + \beta^{*(l+2)} \alpha^* \beta^p \\
& + \beta^{*l} \alpha^* \beta^{(p+1)} + \left[\beta^2 \alpha^{*(l+2)} + 2(l+2) \beta \alpha^{*(l+1)} + (l^2 + 3l + 2) \alpha^{*l} \right] \alpha^p \\
& + \left[\alpha^{*l} \beta^2 + 2l \alpha^{*(l-1)} \beta + l(l-1) \alpha^{*(l-2)} \right] \alpha^{(p+1)} + \alpha^{*(l+2)} \beta^* \alpha^p \\
& \left. + \alpha^{*l} \beta^* \alpha^{(p+1)} \right\} \exp(-|\alpha - \beta|^2)
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 & \times |N_{\alpha\beta}|^2 \{ (|\alpha|^4 + 2(l+2)|\alpha|^2 + (l^2 + 3l + 2))\alpha^l \beta^{*p} \\
 & + [\alpha^{*2}\alpha^l + 2l\alpha^* \alpha^{(l-1)} + l(l-1)\alpha^{(l-2)}] \beta^{*(p+1)} + \alpha^{(l+2)} \beta^{*p} \beta \\
 & + \alpha^l \beta^{*(p+1)} \beta + [|\beta|^4 + 2(l+2)|\beta|^2 + (l^2 + 3l + 2)] \beta^l \alpha^{*p} \\
 & + [\beta^{*2}\beta^l + 2l\beta^* \beta^{(l-1)} + l(l-1)\beta^{(l-2)}] \alpha^{*(p+1)} + \beta^{(l+2)} \alpha^{*p} \alpha \\
 & + \beta^l \alpha^{*(p+1)} \alpha - ([\alpha^{*2}\beta^{(l+2)} + 2(l+2)\alpha^* \beta^{(l+1)} + (l^2 + 3l + 2)\beta^l] \beta^{*p} \\
 & + [\alpha^{*2}\beta^l + 2l\alpha^* \beta^{(l-1)} + l(l-1)\beta^{(l-2)}] \beta^{*(p+1)} + \beta^{(l+2)} \beta^{*p} \alpha \\
 & + \beta^l \beta^{*(p+1)} \alpha + [\beta^{*2}\alpha^{(l+2)} + 2(l+2)\beta^* \alpha^{(l+1)} + (l^2 + 3l + 2)\alpha^l] \alpha^{*p} \\
 & + [\beta^{*2}\alpha^l + 2l\beta^* \alpha^{(l-1)} + l(l-1)\alpha^{(l-2)}] \alpha^{*(p+1)} + \alpha^{(l+2)} \alpha^{*p} \beta \\
 & + \alpha^l \alpha^{*(p+1)} \beta) \} \exp(-|\alpha - \beta|^2).
 \end{aligned}$$

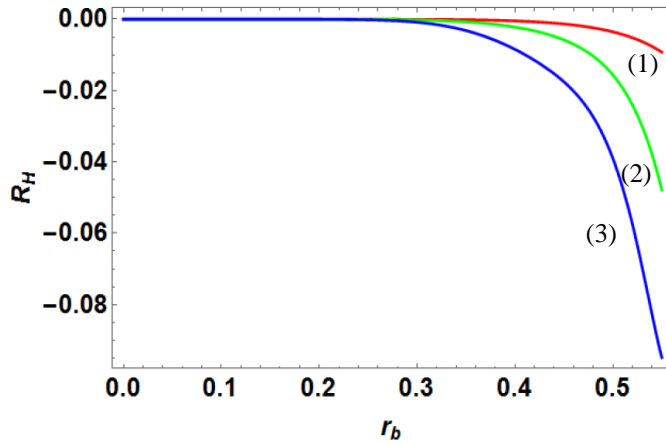
Để thuận tiện cho việc khảo sát quá trình đan rối, chúng tôi chọn các thông số $\alpha = r_a \exp(i\varphi_a)$, $\beta = r_b \exp(i\varphi_b)$ và khảo sát biểu thức (5) theo biên độ r_b và pha dao động φ_b với điều kiện khảo sát là

$$0 \leq r_b \leq 0.5, \varphi_a = 2\varphi_b \text{ và } \varphi_b = \frac{\pi}{2}.$$

Kết quả khảo sát tính đan rối của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ được thể hiện qua các đồ thị hình 1, hình 2.



Hình 1: Khảo sát sự phụ thuộc của tham số $R_H(2,2)$ vào biên độ kết hợp r_b trong các trường hợp $r_a=r_b$ (đường (1)), $r_a=1,5r_b$ (đường (2)) và $r_a=2r_b$ (đường (3))



Hình 2: Khảo sát sự phụ thuộc của tham số $R_H(4,4)$ vào biên độ kết hợp r_b trong các trường hợp $r_a=r_b$ (đường (1)), $r_a=1,5r_b$ (đường (2)) và $r_a=2r_b$ (đường (3))

Từ các đồ thị trên, với các tham số chọn thích hợp thì giá trị của R_H luôn luôn âm, tức là trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ hoàn toàn đan rối theo tiêu chuẩn Hillery và Zubairy bậc cao. Khi biên độ kết hợp r càng lớn thì R_H càng âm, tức là khả năng đan rối càng mạnh.

2.1. Định lượng độ rối bằng tiêu chuẩn Concurrence

Để định lượng độ rối cho trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ, ngoài tiêu chuẩn Hillery Zubairy bậc cao, ta còn có thể sử dụng tiêu chuẩn Concurrence để định lượng độ rối.

Cho trạng thái hai mode a và b

$$|\psi\rangle_{ab} = N(\mu|\eta\rangle_a|\gamma\rangle_b + \gamma|\zeta\rangle_a|\delta\rangle_b), \tag{6}$$

trong đó N là hệ số chuẩn hoá, μ, γ là số phức, $|\eta\rangle_a, |\zeta\rangle_a$ và $|\gamma\rangle_b, |\delta\rangle_b$ là

các trạng thái đã được chuẩn hóa của hai mode a và b. Độ đồng quy được định nghĩa như sau:

$$C = \frac{2|\mu||\nu|\sqrt{(1-|P_1|^2)(1-|P_2|^2)}}{|\mu|^2 + |\nu|^2 + 2\text{Re}[\mu^*\nu p_1 p_2^*]}, \tag{7}$$

trong đó $P_1 = \langle \eta | \zeta \rangle_a$ và $P_2 = \langle \delta | \gamma \rangle_b$.

Trạng thái $|\psi\rangle_{ab}$ là đan rối nếu $C > 0$ và cực đại nếu $C = 1$.

Trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ có dạng:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{ab} &= N_{\alpha,\beta}(\hat{a}^{+2} + \hat{b})(|\alpha\rangle_a |\beta\rangle_b - |\beta\rangle_a |\alpha\rangle_b) \\ &= N_{\alpha,\beta}[(\hat{a}^{+2} + \beta)|\alpha\rangle_a |\beta\rangle_b - (\hat{a}^{+2} + \alpha)|\beta\rangle_a |\alpha\rangle_b]. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{Đặt } |\eta\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{N_1}}(\hat{a}^{+2} + \beta)|\alpha\rangle_a \text{ và } |\xi\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{N_2}}(\hat{a}^{+2} + \alpha)|\beta\rangle_a, \quad (9)$$

với N_1, N_2 là hệ số chuẩn hóa của $|\eta\rangle_a$ và $|\xi\rangle_a$.

Áp dụng điều kiện chuẩn hóa:

$$\begin{aligned} {}_a\langle\eta|\eta\rangle_a = 1 &\Rightarrow N_1 = |\alpha|^4 + 4|\alpha|^2 + 2 + \beta\alpha^2 + \beta^*\alpha^{*2} + |\beta|^2, \\ {}_a\langle\xi|\xi\rangle_a = 1 &\Rightarrow N_2 = |\beta|^4 + 4|\beta|^2 + 2 + \alpha\beta^2 + \alpha^*\beta^{*2} + |\alpha|^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Từ (8) ta viết lại trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp là:

$$|\psi\rangle_{ab} = N_{\alpha\beta}(\sqrt{N_1}|\eta\rangle_a |\beta\rangle_b + \sqrt{N_2}|\xi\rangle_a |\alpha\rangle_b). \quad (11)$$

Vậy (11) có dạng tương tự (6), ta rút được $\mu = \sqrt{N_1}, \nu = \sqrt{N_2}$.

Khi đó độ đồng quy với:

$$P_1 = {}_a\langle\eta|\xi\rangle_a = -\frac{x}{\sqrt{N_1^*}\sqrt{N_2}}(\alpha^{*2}\beta^2 + 4\alpha^*\beta + \alpha\beta^2 + \beta^*\alpha^{*2} + \beta^*\alpha + 2), \quad (12)$$

$$P_2 = {}_b\langle\alpha|\beta\rangle_b \Rightarrow |P_2|^2 = x^*x = xx^* = e^{-|\alpha-\beta|^2} = |x|^2. \quad (13)$$

Thay (12), (13) vào (7) ta được:

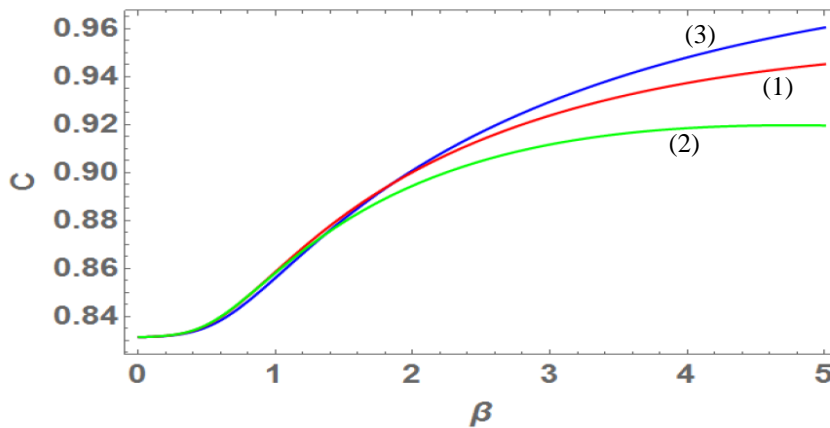
$$\begin{aligned} C &= \frac{2|\sqrt{N_1}||\sqrt{N_2}|\sqrt{[1 - \frac{|x|^2}{N_1^*N_2}(\alpha^{*2}\beta^2 + 4\alpha^*\beta + \alpha\beta^2 + \beta^*\alpha^{*2} + \beta^*\alpha + 2)](1 - |x|^2)}}{N_1 + N_2 - 2\sqrt{N_1^*}\sqrt{N_2}\text{Re}[\frac{|x|^2}{\sqrt{N_1^*}\sqrt{N_2}}(\alpha^{*2}\beta^2 + 4\alpha^*\beta + \alpha\beta^2 + \beta^*\alpha^{*2} + \beta^*\alpha + 2)]} \\ & \quad (14) \end{aligned}$$

Xét α, β thực, ta viết lại C như sau:

$$C = \frac{2\sqrt{N_1N_2}\sqrt{[1 - \frac{x^2}{N_1N_2}(\alpha^2\beta^2 + 5\alpha\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 2)](1 - x^2)}}{N_1 + N_2 - 2x^2(\alpha^2\beta^2 + 5\alpha\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 2)}. \quad (15)$$

Kết quả khảo sát tính đan rối của trạng thái thêm hai và bớt một photon

lên hai mode kết hợp được cho bởi đồ thị sau:



Hình 4: Khảo sát sự phụ thuộc của tham số C vào biên độ kết hợp r_b trong các trường hợp $r_a=2r_b$ (đường (3)), $r_a=4r_b$ (đường (1)) và $r_a=6r_b$ (đường (2))

Kết quả hình 4 cho thấy tham số C nằm trong khoảng từ 0 đến 1 nên trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ là trạng thái đan rối. Như vậy, trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp hoàn toàn bị đan rối theo điều kiện đan rối Hillery - Zubairy bậc cao và tiêu chuẩn Concurrence khi ta chọn các điều kiện thích hợp.

3. Quá trình viễn tải lượng tử với trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ

3.1. Khảo sát quá trình viễn tải lượng tử với trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ

Trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ là một trạng thái đan rối, do đó chúng tôi sử dụng trạng thái này làm nguồn rối để tiến hành viễn tải một trạng thái kết hợp. Trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ được biểu diễn theo trạng thái Fock có dạng:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_{ab} = & N_{\alpha,\beta} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}\right) \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \beta^m}{\sqrt{n!m!}} \\
 & \times \left[\sqrt{(n+1)(n+2)} |n+2, m\rangle_{ab} + \sqrt{m} |n, m-1\rangle_{ab} \right. \\
 & \left. - \sqrt{(m+1)(m+2)} |m+2, n\rangle_{ab} - \sqrt{n} |m, n-1\rangle_{ab} \right]
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Theo mô hình viễn tải của Agarwal và Gábris, bên gửi thông tin là Jane và bên nhận thông tin là Tom. Trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai

mode kết hợp có hai mode a và b , trong đó mode a được đưa tới Jane và mode b được đưa tới Tom, trạng thái được viễn tải là trạng thái kết hợp $|\gamma\rangle_c$ tương ứng

với mode c được đưa vào Jane. Tại nơi gửi thông tin, đầu tiên Jane sẽ thực hiện

việc tổ hợp trạng thái $|\gamma\rangle_c$ và $|\psi\rangle_{ab}$ trở thành một trạng thái ba mode có dạng:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{abc} = & N_{\alpha,\beta} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}\right) \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \beta^m}{\sqrt{n!m!}} \\ & \times \left[\sqrt{(n+1)(n+2)} |n+2, m\rangle_{ab} |\gamma\rangle_c + \sqrt{m} |n, m-1\rangle_{ab} |\gamma\rangle_c \right. \\ & \left. - \sqrt{(m+1)(m+2)} |m+2, n\rangle_{ab} |\gamma\rangle_c - \sqrt{n} |m, n-1\rangle_{ab} |\gamma\rangle_c \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Tiếp theo, Jane dùng phép đo Bell tổ hợp trên hai mode a và c để đo thông tin về mức độ đan rối giữa $|\gamma\rangle_c$ và $|\psi\rangle_{ab}$ dựa trên hai mode a và c . Phép đo này hình thành nên một trạng thái rối

phức hợp, chính là trạng thái Bell. Trạng thái Bell được biểu diễn qua trạng thái Fock như sau:

$$|B(X, P)\rangle_{ca} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{D}_c(2A) |k, k\rangle_{ac}. \quad (18)$$

Khi phép đo tổ hợp hoàn thành, trạng thái này sụp đổ. Do Jane và Tom

cùng chia sẻ trạng thái rối nên Tom có trạng thái sau:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_B = & \frac{2}{\sqrt{\pi}} N_{\alpha,\beta} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}\right) \\ & \times \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \beta^m}{\sqrt{n!m!}} \exp(A^* \gamma - A \gamma^*) \exp\left(-\frac{1}{2} |\gamma - 2A|^2\right) \\ & \times \left[\frac{1}{\sqrt{n!}} (\gamma - 2A)^{n+2} |m\rangle_b + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n!}} (\gamma - 2A)^n |m-1\rangle_b \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Bây giờ, bên Tom tồn tại trạng thái ứng với mode b chứa các thông tin về mode c . Tom sẽ thực hiện phép dịch chuyển $\hat{D}(g2A)$ để xây dựng lại trạng thái được viễn tải ban đầu $|\gamma\rangle_c$,

với glà hệ số điều khiển mà Tom dùng để hoàn thiện độ trung thực của quá trình viễn tải. Trạng thái cuối cùng thu được trong quá trình viễn tải sẽ là:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_{out} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} N_{\alpha,\beta} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}\right) \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \beta^m}{\sqrt{n!m!}} \\
&\times \exp(A^* \gamma - A \gamma^*) \exp\left(-\frac{1}{2}|\gamma - 2A|^2\right) \\
&\times \left[\frac{1}{\sqrt{n!}} (\gamma - 2A)^{n+2} \hat{D}(g2A)|m\rangle_b \right. \\
&+ \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n!}} (\gamma - 2A)^n \hat{D}(g2A)|m-1\rangle_b \\
&- \frac{1}{\sqrt{m!}} (\gamma - 2A)^{m+2} \hat{D}(g2A)|n\rangle_b \\
&\left. - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m!}} (\gamma - 2A)^m \hat{D}(g2A)|n-1\rangle_b \right].
\end{aligned} \tag{20}$$

Đến thời điểm này, quá trình viễn tải đã hoàn thành và để đánh giá mức độ thành công của quá trình viễn tải chúng ta phải dựa vào độ trung thực trung bình F_{av} .

3.2. Độ trung thực trung bình F_{av}

Độ trung thực trung bình F_{av} được dùng để xác định sự thành công của quá

trình viễn tải. Quá trình viễn tải là thành công nếu $0.5 \leq F_{av} \leq 1$. Một quá trình viễn tải được đánh giá là hoàn hảo nếu đạt được $F_{av} = 1$. Độ trung thực trung bình trong quá trình viễn tải được xác định như sau:

$$F_{av} = \int |{}_{in}\langle \psi | \psi \rangle_{out}|^2 d^2 A. \tag{21}$$

Để xác định F_{av} ta tính:

$$\begin{aligned}
{}_{in}\langle \psi | \psi \rangle_{out} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} N_{\alpha,\beta} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}\right) \times \exp(A^* \gamma - A \gamma^*) \exp\left(-\frac{1}{2}|\gamma - 2A|^2\right) \\
&\times \exp\left[g(\gamma^* A - \gamma A^*)\right] \exp\left(-\frac{1}{2}|\gamma - g2A|^2\right) \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \beta^m}{n!m!} \\
&\times \left[(\gamma - 2A)^{n+2} (\gamma^* - g2A^*)^m + m(\gamma - 2A)^n (\gamma^* - g2A^*)^{m-1} \right. \\
&\left. - (\gamma - 2A)^{m+2} (\gamma^* - g2A^*)^n - n(\gamma - 2A)^m (\gamma^* - g2A^*)^{n-1} \right]
\end{aligned} \tag{22}$$

Thay (23) vào (22) ta thu được độ trung thực trung bình như sau:

$$\begin{aligned}
F_{av} = & \int | \langle \psi | \psi \rangle_{out} |^2 d^2 A = \frac{4}{\pi} |N_{\alpha, \beta}|^2 \exp(-|\alpha|^2 - |\beta|^2) \\
& \times \exp(-|\gamma - 2A|^2 - |\gamma - g2A|^2) \sum_{n, m, l, p=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \beta^m \alpha^{*l} \beta^{*p}}{n! m! l! p!} \\
& \times \left\{ (\gamma - 2A)^{n+2} (\gamma^* - g2A^*)^m (\gamma^* - 2A^*)^{l+2} (\gamma - g2A)^p \right. \\
& + p(\gamma - 2A)^{n+2} (\gamma^* - g2A^*)^m (\gamma^* - 2A^*)^l (\gamma - g2A)^{p-1} \\
& - (\gamma - 2A)^{n+2} (\gamma^* - g2A^*)^m (\gamma^* - 2A^*)^{p+2} (\gamma - g2A)^l \\
& - l(\gamma - 2A)^{n+2} (\gamma^* - g2A^*)^m (\gamma^* - 2A^*)^p (\gamma - g2A)^{l-1} \\
& + m(\gamma - 2A)^n (\gamma^* - g2A^*)^{m-1} (\gamma^* - 2A^*)^{l+2} (\gamma - g2A)^p \\
& + mp(\gamma - 2A)^n (\gamma^* - g2A^*)^{m-1} (\gamma^* - 2A^*)^l (\gamma - g2A)^{p-1} \\
& - m(\gamma - 2A)^n (\gamma^* - g2A^*)^{m-1} (\gamma^* - 2A^*)^{p+2} (\gamma - g2A)^l \\
& - ml(\gamma - 2A)^n (\gamma^* - g2A^*)^{m-1} (\gamma^* - 2A^*)^p (\gamma - g2A)^{l-1} \\
& - (\gamma - 2A)^{m+2} (\gamma^* - g2A^*)^n (\gamma^* - 2A^*)^{l+2} (\gamma - g2A)^p \\
& - p(\gamma - 2A)^{m+2} (\gamma^* - g2A^*)^n (\gamma^* - 2A^*)^l (\gamma - g2A)^{p-1} \\
& + (\gamma - 2A)^{m+2} (\gamma^* - g2A^*)^n (\gamma^* - 2A^*)^{p+2} (\gamma - g2A)^l \\
& + l(\gamma - 2A)^{m+2} (\gamma^* - g2A^*)^n (\gamma^* - 2A^*)^p (\gamma - g2A)^{l-1} \\
& - n(\gamma - 2A)^m (\gamma^* - g2A^*)^{n-1} (\gamma^* - 2A^*)^{l+2} (\gamma - g2A)^p \\
& - np(\gamma - 2A)^m (\gamma^* - g2A^*)^{n-1} (\gamma^* - 2A^*)^l (\gamma - g2A)^{p-1} \\
& + n(\gamma - 2A)^m (\gamma^* - g2A^*)^{n-1} (\gamma^* - 2A^*)^{p+2} (\gamma - g2A)^l \\
& \left. + nl(\gamma - 2A)^m (\gamma^* - g2A^*)^{n-1} (\gamma^* - 2A^*)^p (\gamma - g2A)^{l-1} d^2 A. \right. \tag{23}
\end{aligned}$$

Biểu thức (19) cho biết độ trung thực trung bình dưới dạng tổng quát, với g là hệ số điều khiển Tom dùng để hoàn thiện độ trung thực của quá trình viễn tải, nên ta có thể chọn g để điều

kiểm độ trung thực trung bình. Chọn trường hợp $g = 0$ và thực hiện các bước biến đổi, ta thu được biểu thức độ trung thực trung bình có dạng:

$$\begin{aligned}
F_{av} &= \frac{|N_{\alpha,\beta}|^2}{\pi} \exp(-|\alpha|^2 - |\beta|^2) \exp(-|\gamma|^2) \\
&\times \sum_{n,m,l,p=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \beta^m \alpha^{*l} \beta^{*p}}{n!m!l!p!} \int \exp(-|\gamma - 2A|^2) \\
&\times \left\{ (\gamma - 2A)^{n+2} (\gamma^* - 2A^*)^{l+2} \gamma^{*m} \gamma^p \right. \\
&+ p(\gamma - 2A)^{n+2} (\gamma^* - 2A^*)^l \gamma^{*m} \gamma^{p-1} \\
&- (\gamma - 2A)^{n+2} (\gamma^* - 2A^*)^{p+2} \gamma^{*m} \gamma^l \\
&- l(\gamma - 2A)^{n+2} (\gamma^* - 2A^*)^p \gamma^{*m} \gamma^{l-1} \\
&+ m(\gamma - 2A)^n (\gamma^* - 2A^*)^{l+2} \gamma^{*m-1} (\gamma)^p \\
&+ mp(\gamma - 2A)^n (\gamma^* - 2A^*)^l \gamma^{*m-1} (\gamma)^{p-1} \\
&- m(\gamma - 2A)^n (\gamma^* - 2A^*)^{p+2} \gamma^{*m-1} (\gamma)^l \\
&- ml(\gamma - 2A)^n (\gamma^* - 2A^*)^p \gamma^{*m-1} (\gamma)^{l-1} \\
&- (\gamma - 2A)^{m+2} (\gamma^* - 2A^*)^{l+2} (\gamma^*)^n \gamma^p \\
&- p(\gamma - 2A)^{m+2} (\gamma^* - 2A^*)^l (\gamma^*)^n \gamma^{p-1} \\
&+ (\gamma - 2A)^{m+2} (\gamma^* - 2A^*)^{p+2} (\gamma^*)^n \gamma^l \\
&+ l(\gamma - 2A)^{m+2} (\gamma^* - 2A^*)^p (\gamma^*)^n \gamma^{l-1} \\
&- n(\gamma - 2A)^m (\gamma^* - 2A^*)^{l+2} (\gamma^*)^{n-1} (\gamma)^p \\
&- np(\gamma - 2A)^m (\gamma^* - 2A^*)^l (\gamma^*)^{n-1} (\gamma)^{p-1} \\
&+ n(\gamma - 2A)^m (\gamma^* - 2A^*)^{p+2} (\gamma^*)^{n-1} (\gamma)^l \\
&+ nl(\gamma - 2A)^m (\gamma^* - 2A^*)^p (\gamma^*)^{n-1} (\gamma)^{l-1} d^2(\gamma - 2A)
\end{aligned} \tag{24}$$

Thực hiện các phép biến đổi ta thu được:

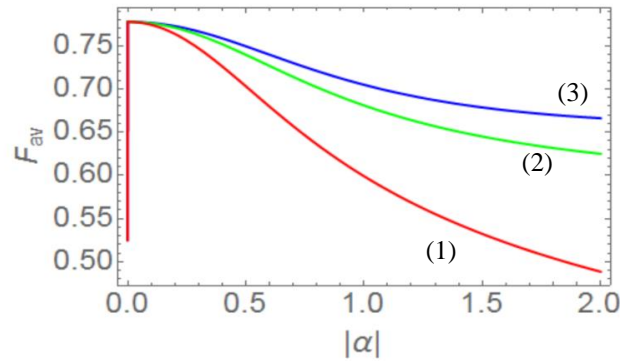
$$\begin{aligned}
 F_{av} = & \left| N_{\alpha, \beta} \right|^2 \exp(-|\alpha|^2 - |\beta|^2) \exp(-|\gamma|^2) \\
 & \times \left\{ \sum_{n,m,p=0}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|^{2n} \beta^m \beta^{*p} \gamma^{*m} \gamma^p}{n!m!p!} (n+1)(n+2) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{|\alpha|^{n+m} \beta^m \beta^{*p} \gamma^{*n} \gamma^p}{n!m!p!} (m+1)(m+2) \right] \right. \\
 & \left. - \sum_{n,m,l=0}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|^{n+l} \beta^m \beta^{*n} \gamma^{*m} \gamma^l}{n!m!l!} (n+1)(n+2) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{|\alpha|^{n+l} \beta^m \beta^{*m} \gamma^{*n} \gamma^l}{n!m!l!} (m+1)(m+2) \right] \right. \\
 & + \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|^{2n+2} \beta^m \beta^{*p} \gamma^{*m} (\gamma)^{p-1}}{n!m!(p-1)!} - \frac{|\alpha|^{n+m+2} \beta^m \beta^{*p} \gamma^{*n} (\gamma)^{p-1}}{n!m!(p-1)!} \right] \\
 & - \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|^{n+l} \beta^m \beta^{*n+2} \gamma^{*m} (\gamma)^{l-1}}{n!m!(l-1)!} - \frac{|\alpha|^{n+l} \beta^m \beta^{*m+2} \gamma^{*n} (\gamma)^{l-1}}{n!m!(l-1)!} \right] \\
 & + \sum_{l,p=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|^{2l+2} \beta^m \beta^{*p} (\gamma^*)^{m-1} \gamma^p}{(m-1)!l!p!} - \frac{|\alpha|^{l+p+2} \beta^m \beta^{*p} (\gamma^*)^{m-1} \gamma^l}{(m-1)!l!p!} \right] \\
 & + \sum_{l,p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|^{n+l} \beta^{p+2} \beta^{*p} (\gamma^*)^{n-1} \gamma^l}{(n-1)!l!p!} - \frac{|\alpha|^{n+l} \beta^{l+2} \beta^{*p} (\gamma^*)^{n-1} \gamma^p}{(n-1)!l!p!} \right] \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m,p=1}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n} \beta^m \beta^{*p} (\gamma^*)^{m-1} (\gamma)^{p-1}}{n!(m-1)!(p-1)!} \\
 & - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n,p=1}^{\infty} \frac{|\alpha|^{n+m} \beta^m \beta^{*p} (\gamma^*)^{n-1} (\gamma)^{p-1}}{(n-1)!m!(p-1)!} \\
 & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n,l=1}^{\infty} \frac{|\alpha|^{n+l} \beta^m \beta^{*n} (\gamma^*)^{n-1} (\gamma)^{l-1}}{(n-1)!m!(l-1)!} \\
 & - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m,l=1}^{\infty} \frac{|\alpha|^{n+l} \beta^m \beta^{*m} (\gamma^*)^{m-1} (\gamma)^{l-1}}{(n-1)!m!(l-1)!} \left. \right\}
 \end{aligned} \tag{25}$$

Để thuận lợi cho việc khảo sát, chúng ta sẽ khảo sát $|\beta|$ và $|\gamma|$ theo $|\alpha|$ với $|\beta|=|\gamma|=k|\alpha|$, từ đó độ trung thực trung bình được viết lại dưới dạng:

$$\begin{aligned}
 F_{av} = & N_{\alpha\beta}^2 \exp(-|\alpha|^2 - 2k^2|\alpha|^2) \\
 & \times \left\{ \sum_{n,m,p=0}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|^{2n} (k|\alpha|)^{2m+2p}}{n!m!p!} (n+2)(n+1) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{|\alpha|^{n+m} (k|\alpha|)^{m+n+2p}}{n!m!p!} (m+2)(m+1) \right] \right. \\
 & + \sum_{n,m,l=0}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|^{n+l} (k|\alpha|)^{2m+n+l}}{n!m!l!} (m+2)(m+1) \right. \\
 & \left. - \frac{|\alpha|^{n+l} (k|\alpha|)^{n+2m+l}}{n!m!l!} (n+2)(n+1) \right] \\
 & + \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|^{2n+2} (k|\alpha|)^{2m+2p-1}}{n!m!(p-1)!} - \frac{|\alpha|^{n+m+2} (k|\alpha|)^{n+m+2p-1}}{n!m!(p-1)!} \right] \\
 & + \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|^{n+l} (k|\alpha|)^{n+2m+l+1}}{n!m!(l-1)!} - \frac{|\alpha|^{n+l} (k|\alpha|)^{n+2m+l+1}}{n!m!(l-1)!} \right] \\
 & + \sum_{l,p=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|^{2l+2} (k|\alpha|)^{2m+2p-1}}{(m-1)!l!p!} - \frac{|\alpha|^{l+p+2} (k|\alpha|)^{2m+l+p-1}}{(m-1)!l!p!} \right] \\
 & + \sum_{l,p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|^{n+l} (k|\alpha|)^{n+l+2p+1}}{(n-1)!l!p!} - \frac{|\alpha|^{n+l} (k|\alpha|)^{n+l+2p+1}}{(n-1)!l!p!} \right] \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m,p=1}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n} (k|\alpha|)^{2m+2p-2}}{(m-1)!n!(p-1)!} - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n,p=1}^{\infty} \frac{|\alpha|^{n+m} (k|\alpha|)^{n+m+2p-2}}{m!(n-1)!(p-1)!} \\
 & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n,l=1}^{\infty} \frac{|\alpha|^{n+l} (k|\alpha|)^{n+2m+l-2}}{(n-1)!m!(l-1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m,l=1}^{\infty} \frac{|\alpha|^{n+l} (k|\alpha|)^{n+2m+l-2}}{n!(m-1)!(l-1)!} \left. \right\} \quad (26)
 \end{aligned}$$

Chúng tôi khảo sát sự phụ thuộc của F_{av} vào biên độ kết hợp $|\alpha|$ theo biểu thức (22) để đánh giá về quá trình

viễn tải lượng tử với nguồn rối là trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp. Kết quả khảo sát được thể hiện trên hình sau:



Hình 5: Sự phụ thuộc của độ trung thực trung bình F_{av} vào biên độ kết hợp $|\alpha|$ với các giá trị $k=1.4$ ứng với đường (2); $k=1.2$ ứng với đường (3); $k=1$ ứng với đường (1)

Từ đồ thị hình 5 cho ta thấy rằng kết quả của quá trình viễn tải là thành công, giá trị của độ trung thực trung bình F_{av} nằm trong khoảng từ 0.5 đến 1.

4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn đan rối Hillery-Zubairy bậc cao và tiêu chuẩn Concurrence để khảo sát tính đan rối của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ và sử dụng trạng thái này làm nguồn rối để thực hiện viễn tải lượng tử. Kết quả cho thấy: Thứ nhất, trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ là một trạng thái đan rối theo tiêu chuẩn Hillery-Zubairy bậc cao và tiêu chuẩn Concurrence. Khi xác định các tham số trạng thái phù hợp thì trạng thái này là

một trạng thái đan rối hoàn toàn và có thể sử dụng chúng như là một nguồn tài nguyên đan rối để viễn tải lượng tử.

Thứ hai, chúng tôi đã thực hiện quá trình viễn tải lượng tử một trạng thái kết hợp với nguồn rối là trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ và đánh giá sự thành công của quá trình viễn tải thông qua độ trung thực trung bình của quá trình viễn tải. Kết quả cho thấy quá trình viễn tải là thành công, độ trung thực trung bình của quá trình viễn tải nằm trong khoảng $0.5 < F_{av} \leq 1$ với trạng thái có biên độ bé. Tuy nhiên, độ trung thực của quá trình viễn tải là chưa ổn định và phụ thuộc vào các tham số đưa vào, độ trung thực trung bình tiến gần đến 1 khi chọn các giá trị tham số $|\beta| = |\gamma| = k|\alpha|$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Glauber. R. J. (1963), *Phys. Rev. Lett*, 131, 2766
2. Sudarshan. E. C. G. (1963), *Phys. Rev. Lett*, 10, 277
3. Agarwal. G. S. and Tara. K. (1991), *Physical Review A*, 43, 492

4. Nguyễn Vũ Thụy (2017), “Nghiên cứu các tính chất phi cổ điển của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp lẻ”, Luận văn Thạc sĩ Vật lý, Trường Đại học Sư phạm Huế

5. Nguyễn Văn Phong (2016), “Nghiên cứu tính đan rối và viễn tải lượng tử với trạng thái hai mode kết hợp SU(2) lẻ”, Luận văn Thạc sĩ Vật lý, Trường Đại học Sư phạm Huế

6. Nguyễn Thị Phương Ni (2017), “Định lượng độ rối và viễn tải lượng tử với trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích SU(2) chẵn”, Luận văn Thạc sĩ Vật lý, Trường Đại học Sư phạm Huế

7. Hillery M. and Zubairy M. S. (2006), *Phys. Rev. A*, 74(3), 032333

STUDYING THE DEGREE OF ENTANGLEMENT AND QUANTUM TELEPORTATION WITH DOUBLE-PHOTON ADDED AND SINGLE-PHOTON SUBTRACTED TWO-MODE ODD COHERENT STATE

ABSTRACT

In the paper, we consider the degree of entanglement in the double-photon added and single-photon subtracted two-mode odd coherent state. By applying the higher-order Hillery-Zubairy entangled criterion and Concurrence condition, we concluded that the double-photon added and single-photon subtracted two-mode odd coherent states is absolutely entangled state. Then this state is used as an entangled resource for the quantum teleportation of a coherent state. From the results of the average fidelity, we show that teleportation process is successful when the fidelity reaches the value of $0.5 < F_{av} < 1$.

Keywords: *Hillery-Zubairy entangled criterion, Concurrence condition, teleportation process, the average fidelity*

(Received: 11/6/2018, Revised: 9/7/2018, Accepted for publication: 16/12/2019)